बच्चे, रेखा और कोण

अंकित सिंह

गणित में ज्यामितीय आकृतियों की अवधारणाएँ जटिल तो हैं लेकिन हमारे आसपास का भौतिक संसार इसे सीखने-समझने के अनेक मौक़े देता है। एक गणित शिक्षक अगर बच्चों के लिए ऐसे मौक़े बनाता है तो गणित की इन अवधारणाओं को सीखना न सिर्फ़ आसान होता है बल्कि ठोस और गहरी समझ भी बनती है। प्रस्तुत आलेख में लेखक ने कोण की अवधारणा पर समझ बनाने के लिए बच्चों के एक समूह के साथ किए गए अपने क्रमबद्ध प्रयास को बताया है। सं.

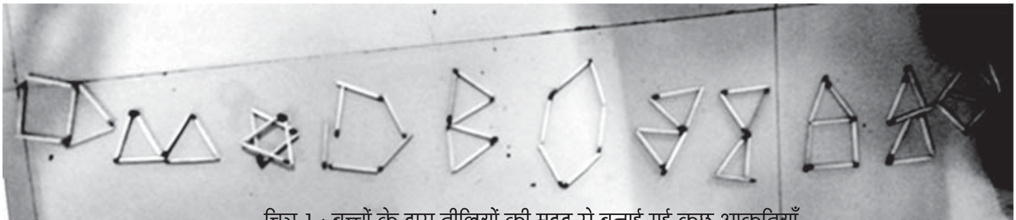
गणित की उलझन ही यही है कि किताब से उसका पढ़ाया जाना बड़ा कठिन हो जाता है। ये कठिनाई दो तरह से पेश आती है। एक तो किताबी भाषा का कठिन और तकनीकी शब्दावली से भरा हुआ होना और दूसरा, बहुत ही बँधे-बँधाए तरीक़े से अवधारणाओं और उनसे जुड़े मसलों का रखा जाना। गणित में भी अन्य विषयों की तरह बोलचाल की भाषा, अपने आसपास उसे देख और महसूस कर पाने की सम्भावना का होना और उसे विस्तार से खोलकर रख पाना ज़रूरी होता है ताकि उसके सारे पहलू साफ़-साफ़ और वास्तविक नज़र आ सकें। गणित को औपचारिक व उसकी प्रकृति को अमूर्त समझकर अकसर इस तरह के पहलुओं को नज़रअन्दाज़ कर दिया जाता है।

एक मिश्रित समूह में, जिसमें 7 से लेकर 11-12 साल के बच्चे हैं, कोण पर अवधारणात्मक समझ बनाने और उसके व्यवहारिक पहलू को जानने के प्रयासों का सिलसिलेवार अनुभव यहाँ प्रस्तुत किया गया है। इसे चार दिनों के कक्षा शिक्षण कार्य से हम समझने की कोशिश करेंगे।

पहला दिन : कोण की समझ बनाने का प्रयास

आज कक्षा की शुरुआत एक खेल से हुई। बच्चों को माचिस की 6 तीलियों से कुछ आकृतियाँ बनानी थीं। शर्त ये थी कि सबकी आकृतियाँ अलग-अलग होनी चाहिए। सभी बच्चों ने आकृतियाँ बनाना शुरू किया। मैंने ख़ुद एक त्रिभुज बनाकर उन्हें बताया कि बनाई गई आकृति बन्द होनी चाहिए। फिर बच्चों ने काफ़ी सारी आकृतियाँ बनाईं और सभी देखकर आश्चर्य में थे कि 6 तीलियों से इतनी सारी तरह-तरह की आकृतियाँ बनाई जा सकती हैं।

"इन सभी आकृतियाँ में क्या-क्या एक जैसा है?" मैंने बच्चों से पूछा।



चित्र 1 : बच्चों के द्वारा तीलियों की मदद से बनाई गई कुछ आकृतियाँ



चित्र 2 : आकृति बनाते बच्चे

बच्चों ने बताया कि सबमें 6 तीलियाँ हैं। मैंने पूछा, "और क्या-क्या एक जैसा है?" कुछ बच्चों ने बताया कि इन सबमें सीधी लाइन भी है। तब और सोचने की बाद 9 साल के सम्राट ने बताया कि इसमें कोण भी है। हम आगे बात करने लगे। मैंने माचिस की तीलियों से एक साइड में 3 आकृतियाँ बनाकर रखी थीं, इनमें तीलियाँ अलग-अलग कोण पर थीं।

मैंने सम्राट से कहा, "इन आकृतियों में कोण कहाँ दिख रहे हैं?" उसने आकृतियों के कोनों की तरफ़ इशारा करते हुए कहा, "ये कोण हैं।" फिर बाक़ी बच्चों से पूछा, "क्या आपको लगता है यहाँ कोण हैं?" बच्चों ने कोई जवाब नहीं दिया।

पहले दिन हमने क्लास को यहीं ख़त्म किया और बच्चों को इस सवाल के साथ घर जाने दिया कि कोण क्या है?

दूसरा दिन

आज बच्चों के साथ कोण पर आगे बात करनी थी। सारे बच्चे कोण के बारे में जानने के लिए उत्सुक थे और कुछ जानकारियाँ इकट्ठा करके भी लाए थे।

कक्षा की शुरुआत हमने सम्राट की बात को ही आगे बढ़ाकर की, जहाँ उसने कहा था कि आकृति में उसे कोनों में कोण दिखते हैं। मैंने बच्चों को माचिस की तीलियाँ दीं और उन्हें ठीक से रखकर कोने बनाने को कहा। बच्चों ने कोने बनाए जिनमें लेटर A, लेटर V एवं कुछ अन्य चीज़ों की आकृतियाँ थीं।

फिर उनसे पूछा, "कोना बनाने के लिए हम क्या कर रहे हैं।" बच्चों ने बताया, "माचिस की तीलियों को जोड़ने से कोने बनते हैं।" मैंने बच्चों से पूछा, "क्या हम कह सकते हैं कि माचिस की तीली रेखाखण्ड है और दो रेखाखण्ड जहाँ पर मिल रहे हैं, एक दूसरे पर झुक रहे हैं, उनके जोड़ पर कोण बन रहा है?" (यह बच्चे रेखाखण्ड से पहले परिचित हो चुके थे, अतः वे कुछ-कुछ समझ पाए।) इस परिभाषा को पढ़ते हुए हम सभी ने दो रेखाओं के मिलने और उनके यथार्थ में प्रारूपों को खोजने का प्रयास किया। बच्चों के पास से कई उदाहरण आए और बोर्ड, लैपटॉप व ऐसे ही आकार की अन्य चीज़ों में भी कोण बनने की बात आई। (इस बिन्दु को मैंने नोट किया और तय किया कि अगले दिन की चर्चा में इसपर भी बात हो।)

हमने अब तीलियों वाले खेल को वापस खेला एवं तीलियों से बन्द आकृतियाँ बनाईं और पाया कि जब दोनों रेखाओं के मिलने का तरीक़ा बदलता है तो कोण की बनावट में भी बदलाव आता है। (इसे एक प्रकार से विभिन्न तरह के कोण को देख पाने की शुरुआत मान सकते हैं।) अब मेरे सामने टास्क ये था कि बच्चों को किस तरह से यह दिखाया जाए कि कोण असल में दो रेखाओं के बीच बदलता झुकाव है और इसके लिए हमने एक गतिविधि का सहारा लिया।

घड़ी के दो काँटों को हमने दो रेखाखण्डों के रूप में माना एवं 12 बजने के समय को देखा और फिर समय को 1, 2, 3, करते हुए बढ़ाते गए।

इस गतिविधि से बच्चों को यह समझने में मदद मिली कि दो रेखाखण्डों के बीच में जो झुकाव है वह बदल रहा है और यही उन रेखाखण्डों के बीच का कोण है, जो घड़ी में समय बदलने के साथ-साथ बदलता है।

तीसरा दिन

आज के दिन की शुरुआत बच्चों के साथ चर्चा से हुई। एक बच्चे ने बताया कि उसने

दीवार के कोने में भी कोण देखे हैं। (इससे यह समझ आया कि कोण को दो रेखाओं के मिलने की समझ में कोने भी शामिल हैं)। इसपर बच्चे सोचें इसलिए जो कार्य किया, वह संक्षेप में इस प्रकार है :

मैंने बच्चों के सामने एक शंकु आकार की टोपी रखकर पूछा, "क्या इसमें कोना है?" सभी बच्चों का जवाब था, "हाँ।"

दूसरा सवाल था, "क्या इसमें आपको कहीं पर दो रेखाएँ मिलने से कोण बनता दिखाई दे रहा है जैसे हमने कल घड़ी में बनाकर देखा था?"

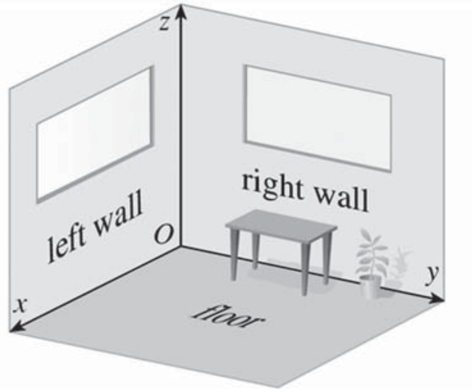
सभी बच्चों ने 'न' में जवाब दिया।

यहाँ इस बात पर ध्यान दिया कि कोण और कोने के फ़र्क़ पर बच्चों की समझ बन पाए, नहीं तो बच्चे त्रिविमीय कोने और कोण को एक ही समझने की ग़लती कर बैठते हैं। अवधारणा की यह ग़लती आगे कोण को और अगले स्तर पर समझने में दिक़्क़त पैदा करती है। कोशिश होनी चाहिए कि कोण और रेखाखण्ड (रेखा, किरण) के बीच के सम्बन्ध को वो समझें। यहाँ यह साफ़ कर देने की ज़रूरत है कि दोनों रेखाओं के बीच जो क्षेत्र बनता-सा दिखता है वह कोण नहीं है। अकसर कोण को लेकर जो दो भ्रम होते हैं, उनमें से एक तो कोनों को ही कोण समझना है और दूसरा, रेखाओं के बीच का क्षेत्र कोण के रूप में समझा जाता है। उससे ऐसा भी लग सकता है कि उनके बीच का क्षेत्रफल कोण का माप होगा। इसीलिए यह कहना, कि ब्लैकबोर्ड, लैपटॉप स्क्रीन, कमरों के कोने, आदि में कोण हैं, कई ऐसी ही भ्रमात्मक धारणाओं को पैदा कर सकता है।

इसीलिए मैंने प्रयास किया कि बच्चे देख पाएँ कि दीवार के कोनों में हम तीन फ़लकों को मिलता देखते हैं और हर कोने में इनके मिलने के स्थानों पर तीन रेखाखण्ड होते हैं जोकि सामान्यतः हमेशा ही एक दूसरे की लम्बवत दिशा में होते हैं और यहाँ कमरे के अन्दर हर कोने में तीन कोण बनते हैं। पर बच्चे दीवार के कोने में छिपे तीन कोणों को नहीं देख पा रहे थे जिन्हें समझने के लिए हमने चित्र 3 की मदद ली।

इस चित्र की मदद से बच्चे देख पाए कि कैसे हर दीवार से मिलने वाली लाइन की मदद से एक कोना, लेकिन तीन कोण बन रहे हैं।

यहाँ फिर से बच्चों को इस बात को स्पष्ट करने और बताने की कोशिश की कि हमें दीवार नहीं बल्कि उसमें बन रही एक सीधी रेखा को समझना है। जैसे– दो दीवारों के जोड़ पर एक लाइन छत से नीचे फ़र्श तक आती है और दूसरी लाइन फ़र्श व दीवार के मिलने से बनती है। ये दोनों लाइनें जहाँ मिलती हैं वहाँ कोण बनता है। इस तरह हम देखें तो कमरे के एक कोने में यहाँ तीन कोण बनते हुए दिखते हैं।



चित्र 3 : कमरे की दीवार और फ़र्श में बनने वाले कोने और कोणों को दर्शाता त्रिविमीय चित्र

छत से फ़र्श तक आती हुई खड़ी रेखा से दोनों दीवारों की तरफ़ एक-एक कोण, इस तरह दो कोण तो ये हुए और फिर दोनों दीवारों के बीच फ़र्श पर बनने वाला एक और कोण। इस तरह ये तीन कोण बनते हैं।

चौथा दिन

विभिन्न तरह से कोनों को जाँचने व परखने के बाद बच्चे इस नतीजे पर पहुँच चुके थे कि



चित्र 4 : आपस में चाँदे का उपयोग समझते बच्चे



चित्र 5 : ख़ुद का कोण मापक बनाती एक बच्ची

जब दो रेखाखण्ड मिलते हैं तो विभिन्न कोणों में रेखाखण्डों के बीच होने वाले झुकाव में अन्तर होता है। और मैंने बच्चों को कहा कि आप सभी लोग सही बोल रहे हैं। अब इसी अन्तर को, यह कोण छोटा है या बड़ा, इस बात को जाँचने या नापने के लिए हमारे पास एक उपकरण होता है जिसको हम चाँदा कहते हैं।

इसके बाद हमने कम्पास बॉक्स में चाँदे को देखा और उसके बारे में बात की। हमने देखा कि हमारे दूसरे पैमाने की तरह यह भी शून्य से शुरू होता है। बच्चों को मैंने चाँदे की मदद से कोण का मापन बताया और वे निकल पड़े पूरे स्कूल में कोण ढूँढ़ने और मापने के लिए।

बच्चों ने कोण को नापने के लिए काग़ज़ से अपने ख़ुद के विभिन्न मापक बनाए और उनका उपयोग किया। इसी कड़ी में मैंने बताया कि राजमिस्त्री और बढ़ई भी कोण और सीध मापने के लिए अलग-अलग उपकरणों का इस्तेमाल करते हैं। साहुलसूत्र, गुनिया और धागा का इस्तेमाल होते कुछ बच्चों ने पहले से देखा हुआ था। मैंने उन्हें लैपटॉप पर इन सब उपकरणों के चित्र और उनके इस्तेमाल के वीडियो भी दिखाए।

ये चार दिन यह प्रयास रहा कि बच्चों के बीच कोण को लेकर एक आधारभूत समझ बन पाए। बच्चे समझ पाएँ कि यह एक द्विविमीय (two dimensional) संरचना है जहाँ कोण बनाने वाली रेखाओं की मोटाई नगण्य है, और उनके बीच का झुकाव ही कोण है न कि वह क्षेत्र जो दो रेखाओं के बीच दिखता है। कोण की अवधारणा सिखाते समय यही मुख्य बातें ध्यान में रखने की हैं। होता यह है कि कक्षा में कोण समझाते समय जो सामग्री इस्तेमाल की जाती है वह वास्तविक, ठोस और त्रिविमीय (three dimensional) होती है। कमरे के कोने, किताब के कोने, ईंट, खिड़की, दरवाज़े, स्लेट, समोसा, पराठे, कार्ड शीट को उदाहरण के रूप में लेने पर यही समस्या खड़ी होती है क्योंकि सामान्य बोलचाल में कोना और कोण कई बार एक ही अर्थ में प्रयुक्त होते हैं। यहाँ शिक्षक की ज़िम्मेदारी है कि वह अवधारणा बनाते समय इसके अन्तर को स्पष्ट करता चले।

इसके बाद आगे की कक्षाओं में कोण के अलग-अलग प्रकारों और उनके मापन की बारीक़ियों पर कुछ अभ्यास कार्य किया जाना उपयोगी होगा।

अंकित सिंह, समावेशी शिक्षा से जुड़े आनंद निकेतन डेमोक्रेटिक स्कूल में काम कर रहे थे, वर्तमान में भोपाल में देहली पब्लिक स्कूल में प्राइमरी लेवल पर गणित विषय पर काम कर रहे हैं।
सम्पर्क : singh.ankit754@gmail.com